Шифр: 10-15

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Выборгский

Школа МБОУ „Гимназия" Выборгского Района

Класс 10 А

ФИО Забавский Иван Андреевич

№10.1

1	2	3	4	5	Σ
7	4	0	0	X	11

Разложим число 3990 по основной теореме арифметики на простые множители $3990 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19$ $\boxed{10-15}$

Получили 5 множителей. Заметим, что под искомое число попадает число 6571 (или любое другое число созданное перестановкой данных цифр.) Сумма ~~цифр~~ в нем равна $6+1+5+7=19$, а произведение можно представить как $2\cdot3\cdot5\cdot7$

Число 6571 (а так же числа, образованные перестановкой данных цифр) ~~[illegible]~~ являются искомым.

№10.3

Пускай доска раскрашена как шахматная. Тогда для того, чтобы Дима мог сделать ход рядом должны находится две клетки разных цветов (с учётом следующего замечания)

↓

(1) Будем считать, что когда Коля рисует в клетке крестик, то клетка меняет свой цвет.

Тогда рассмотрим как меняется сумма белых и черных клеток в процессе игры. С учетом (1) ход Коли не изменяет суммарного числа клеток на поле, а каждый ход Димы закрывает ровно 2 клетки (причем всегда одну белую и одну черную)

Изначально на поле 32 белые и 32 черные клетки. Коля может выиграть, только если после его хода на поле не остается ~~[illegible]~~о клеток какого-либо из цветов.

(т. к. если после его хода остается допустим 1 белая и 7 черных, то после хода Димы будет 0 белых и 6 черных, но тогда след. ход Коли вновь сделает 1 белую клетку на доске.)

№10.3 (продолжение)

10-15

Отметим, что после каждой пары ходов на поле может остаться лишь чётное число фишек обоих цветов, т.к. изначальное их число - чётное. Ход Коли вычитает 1 из одного цвета и прибавляет 1 к другому. А ход Димы вычитает по 1 из обоих цветов. Т.е. в конечном итоге число клеток одного цвета уменьшается на 2, а другого не изменяется. Значит не может быть такой ситуации, что до Колиного хода на доске есть ровно 1 клетка какого-либо цвета. $\Rightarrow$ При правильной игре Коля выиграть не может $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Побеждает Дима.

№10.2.

Рассмотрим какое наибольшее значение может иметь какой-то член любой из последовательностей. Т.к. в случае его максимума сумма остальных членов должна быть минимальной (т.к. общая сумма фиксирована и равна n^2), то упорядочив рассматриваемое мн-во (без разницы; либо A, либо B) по возрастанию получим мн-во: $1, 2, 3, 4 \ldots, n-2, n-1, a_n$. Где a_n - тот самый наибольший возможный ~~член~~ элемент мн-ва. Т.к. их сумма равна n^2, то a_n можно выразить как

$$a_n = n^2 - \left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right) = n^2 - \left(1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) = n^2 - \left(\frac{n^2-3n+2}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{n^2+3n-4}{2}$$

Т.е. для ~~[illegible]~~ любого элемента мн-ва A или B выполняется условие $a_{\substack{k\\ A\,и\,B}} \leq \frac{n^2+3n-4}{2}$

Предположим, что искомого числа нет, т.е. мн-ва не имеют общих элементов. Тогда, если мы сложим все элементы обоих множеств, то их сумма должна будет равняться $2n^2$

№10.2 (продолжение)

Но давайте рассмотрим минимум, который может достигать сумма из $2n$ различных натуральных чисел.

Этот минимум это сумма ряда:

$1+2+3+4+\dots+(2n-1)+2n = 2n + \frac{2n\cdot(2n-1)}{2} = 4n^2+2n$. Т.е. число, заведомо большее чем $2n^2$ => Приходим к противоречию => Искомое число всегда найдётся.

№10.4

Предположим, что для любого $y<\frac{p}{2}$ выражение $py+1 = a\cdot b$ (где $a\in\mathbb{Z}$ $a>y$; $b\in\mathbb{Z}$ $b>y$) верно. Тогда т.к. $a\cdot b>y^2$, то и $py+1>y^2$. Но по определению $y^2<\frac{p^2}{4}<\frac{p^2}{2}$ и $py+1<\frac{p^2}{2}+1$ =>

=> $\frac{p^2}{2}+1>y^2$.

Рассмотрим число $y=\frac{p-1}{2}$. Оно удовлетворяет всем условиям т.к. $py+1=\frac{p^2-p+2}{2}\neq ab>y^2=\frac{p^2-2p+1}{4}$

Шифр: 2-10-13

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Выборгский

Школа МБОУ „Гимназия" Выборгского района

Класс 10

ФИО Забавский Иван

6	7	8	9	10	Σ
7	7	X	0	0	14

2-10-13

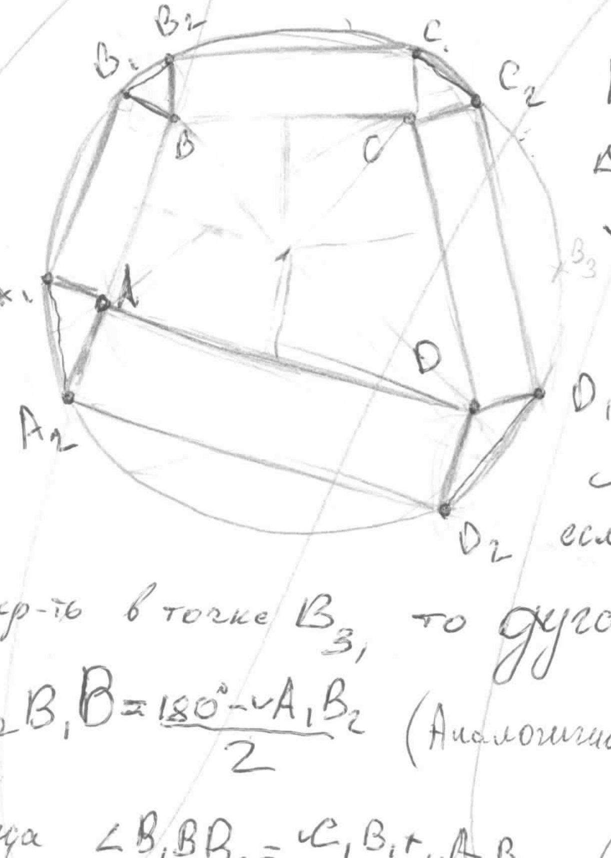
№10.6.

Да, можно. Например следующей цепочкой.

$\boxed{\cos x} \to \boxed{\begin{matrix}\cos x \\ \cos^2 x\end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix}\cos x \\ \cos^2 x \\ \cos x + \cos^2 x\end{matrix}}$

При $x=\pi$ $\cos^2 x = (-1)\cdot(-1) = 1 \Rightarrow \cos x + \cos^2 x = -1+1=0$.

№10.7.



Рассмотрим треугольники $\triangle BB_1B_2$ и $\triangle DD_1D_2$.

Угол $\angle B_1BB_2 = 180^\circ - (\angle B_2B_1B + \angle B_1B_2B)$

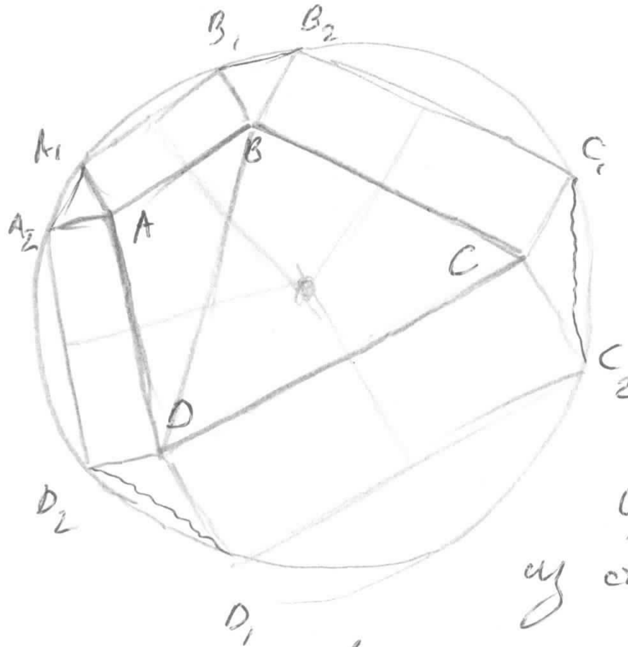
(Аналогично $\angle D_1DD_2 = 180^\circ - (\angle DD_1D_2 + \angle DD_2D_1)$.)

Заметим, что т.к. $\angle A_1B_1B = 90^\circ$, то если продолжение стороны B_1B пересечёт окр-ть в точке B_3, то дуга $\smile A_1B_3 = 180^\circ$. Тогда ~~угол~~

$\angle B_2B_1B = \dfrac{180^\circ - \smile A_1B_2}{2}$ (Аналогично $\angle B_1B_2B = \dfrac{180^\circ - \smile C_1B_1}{2}$)

Итога $\angle B_1BB_2 = \dfrac{\smile C_1B_1 + \smile A_1B_2}{2}$ (Аналогично $\angle D_1DD_2 = \dfrac{\smile C_2D_2 + \smile A_2D_1}{2}$)

№10.7. 2-10-13



Проведём диагональ BD.

Рассмотрим 8-ми угольник $A_1B_1B_2C_1C_2D_1D_2A_2$. Он вписан в окр-ть по условию. Центр этой окр-ти лежит в точке пересечения срединных перпендикуляров к каждой из сторон. (т.к. Из соображений ГМТ, равноудалённых от концов отрезка).

Рассмотрим окр-ти, описанные вокруг $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$. Центр первой лежит в точке пересечения срединных перпендикуляров к AB и AD, а второй в точке пересечения срединных перпендикуляров к CB и CD. Но заметим, что т.к. A_1B_1BA-прямоугольник, то срединный перпендикуляр к AB совпадает со срединным перпендикуляром к A_1B_1 (Аналогично с.п. к A_2D_2 совпадает со с.п. к AD и т.д.)

Из вышесказанного следует, что центр окр-ти, описанной вокруг $\triangle ABD$, совпадает с центром окр-ти, описанной вокруг 8-ми угольника, а также с центром окр-ти, описанной вокруг $\triangle BDC$. Но т.к. радиусы и окр-тей, описанных вокруг $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ совпадают (и равны DO, где O-центр окр-тей) то A, B, C и D лежат на одной окр-ти.

ч.т.д.

№ 10.10

Пусть Вася последовательно даст Пете значения

$t=0$, $t=1$, $t=-1$, $t=2$, $t=-2$...

Если многочлены имеют вид

$f(x)=ax^2+bx+c$ $g(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$, то

узнав значение при $t=0$, Вася будет знать либо c, либо c_1.

при $t=1$ либо $a+b+c$ либо $a_1+b_1+c_1$ и т.д.

После первых 5 вопросов Вася может получить 1 из 2^5 систем вида

$$\begin{cases} c=z_1 \\ a+b+c=z_2 \\ a_1-b_1+c=z_3 \\ 4a_1+2b_1+c_1=z_4 \\ 4a-2b+c=z_5 \end{cases}$$

где z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 – значения полученные ответы.

Заметим, что в любой из 32 полученных систем можно выделить систему из 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными $\Rightarrow$ найти значения коэф. либо a, b, c, либо a_1, b_1, c_1. Т.е. ~~при~~ Вася знает, что получил одну из 32 возможных систем, из которых по-крайней мере одна дает ответ (либо для $f(x)$, либо для $g(x)$) при известных $z_1, \dots, z_5$. Т.е. при $n=5$ Вася может гарантировано выполнить свою задачу. Заметим так же, что при $n<5$ он может получить систему вида:
$$\begin{cases} c_1=z_1 \\ a+b+c=z_2 \\ a_1-b_1+c_1=z_3 \\ 4a+2b+c=z_4 \end{cases}$$
которая уже может не дать верного ответа.

Следовательно $\underline{n=5}$

№ 10.9.

Рассмотрим какие фигуры может получить разрезая наш правильный многоугольник. Т.к. диагонали пересекаться не могут, то каждый из получившихся многоугольников образован ровно 1-й диагональю и четным числом сторон исходного правильного многоугольника.

Треугольник никогда не может стать хорошим, т.к. для него бы тогда не выполнялось $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$. (где $\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$ - углы треугольника)

Заметим, что в любом случае в каждом из получившихся многоугольников стороны, образованные ребрами начального правильного многоугольника не могут быть параллельными. Т.к. в правильном многоугольнике параллельными могут быть лишь напротив лежащие стороны (и если общее число сторон четно), А если мы проводим по-крайней мере одну диагональ, ~~так~~ таким образом, чтобы разделить многоугольник на многоугольники с равным числом сторон, то эти 2 параллельные стороны правильного многоугольника останутся по разные стороны этой диагонали. . . . . .